1ères Maths DS 3 Samedi 9 mars 20243
Calculatrice autorisée en **mode examen** **1h30**

NOM :
Prénom :

Exercice 1 – **QCM [8 points]**
Pour chaque question, donner la (ou les) bonne(s) réponse(s) parmi **A**, **B**, **C** ou **D**.

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
1	(u_n) est arithmétique $u_2 = 35$ et $u_7 = 20$. La raison de la suite (u_n) est égale à ...	-15	-3	$\frac{20}{35}$	3	
2	(u_n) est arithmétique $u_0 = 3$ de raison 5. On pose : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$ Alors on a $S = \cdots$	38	255	308	364	
3	(u_n) est arithmétique, $u_5 = 4$ et $u_{15} = 19$, alors ...	$u_0 = -3$	$u_{10} = 13$	$u_{20} = 26{,}5$	$u_{30} = 40$	
4	(v_n) est géométrique, $v_9 = \frac{1}{2}$ et $v_{14} = 16$, alors ...	$v_0 = \frac{1}{512}$	$v_{12} = 8$	$v_{20} = 1024$	$v_{25} = 16\,384$	
5	(t_n) vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = 3^{n+1} - 3^n$ On peut en déduire que ...	(t_n) est arithmétique	(t_n) est géométrique de raison 3	(t_n) est géométrique de raison 2	(t_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.	
6	(u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $u_0 \neq 0$, alors ...	$\frac{u_8}{u_9} = \frac{1}{3}$	$u_8 = \frac{1}{9}u_6$	$u_3u_5 = u_4^2$	$u_0 = 729u_6$	
7	$u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$. On en déduit que ...	(u_n) est arithmétique	(u_n) est géométrique	(u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique	(v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ est géométrique	
8	La somme : $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$ est égale à ...	$2^{10} - 2$	$2^{11} - 1$	2048	2047	

Corrigé

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
1	(u_n) est arithmétique $u_2 = 35$ et $u_7 = 20$. La raison de la suite (u_n) est égale à ...	-15	-3	$\frac{20}{35}$	3	**B**

$u_7 = u_2 + (7-2) \times r$, $20 = 35 + 5r$, $-15 = 3r$, $r = -3$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
2	(u_n) est arithmétique $u_0 = 3$ de raison 5. On pose : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$ Alors on a $S = \cdots$	38	255	308	364	**C**

$u_{10} = u_0 + 10r = 3 + 10 \times 5 = 53$

$$S = u_0 + \cdots + u_{10} = \frac{(u_0 + u_{10}) \times 11}{2} = \frac{(3 + 53) \times 11}{2} = \frac{56 \times 11}{2} = 308$$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
3	(u_n) est arithmétique, $u_5 = 4$ et $u_{15} = 19$, alors ...	$u_0 = -3$	$u_{10} = 13$	$u_{20} = 26{,}5$	$u_{30} = 40$	C

$u_{15} = u_5 + (15-5) \times r \qquad 19 = 4 + 10r \qquad 15 = 10r \qquad r = 1{,}5$

$u_0 = u_5 + (0-5) \times r = 4 - 5 \times 1{,}5 = 4 - 7{,}5 = -3{,}5$

$u_{10} = u_5 + 5r = 4 + 5 \times 1{,}5 = 4 + 7{,}5 = 11{,}5$

$u_{20} = u_5 + 15r = 4 + 15 \times 1{,}5 = 26{,}5$

$u_{30} = u_5 + 25r = 4 + 25 \times 1{,}5 = 41{,}5$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
4	(v_n) est géométrique, $v_9 = \frac{1}{2}$ et $v_{14} = 16$, alors ...	$v_0 = \dfrac{1}{512}$	$v_{12} = 8$	$v_{20} = 1024$	$v_{25} = 16\,384$	**C**

$v_{14} = v_9 \times q^{14-9} \qquad 16 = \frac{1}{2} \times q^5 \quad 32 = q^5 \qquad q = 2$

$v_9 = v_0 \times q^9 \qquad \frac{1}{2} = v_0 \times 2^9 \quad \frac{1}{2} = v_0 \times 512 \qquad v_0 = \frac{1}{1024}$

$v_{12} = v_9 \times 2^3 = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$

$v_{20} = v_{14} \times 2^6 = 16 \times 64 = 1\,024$

$v_{25} = v_{14} \times 2^{11} = 16 \times 2^{11} = 32\,768$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
5	(t_n) vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = 3^{n+1} - 3^n$ On peut en déduire que ...	(t_n) est arithmétique	(t_n) est géométrique de raison 3	(t_n) est géométrique de raison 2	(t_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.	**B**

$t_n = 3^n \times 3 - 3^n \times 1 = 3^n(3-1) = 2 \times 3^n$

$t_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = t_n \times 3 = 3 \times t_n$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
6	(u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $u_0 \neq 0$, alors ...	$\dfrac{u_8}{u_9} = \dfrac{1}{3}$	$u_8 = \dfrac{1}{9} u_6$	$u_3 u_5 = u_4^2$	$u_0 = 729 u_6$	**BCD**

$\dfrac{u_8}{u_9} = \dfrac{u_8}{u_8 \times \dfrac{1}{3}} = 3$

$u_8 = u_6 \times q^2 = u_6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = u_6 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9} u_6$

$u_3 \times u_5 = \dfrac{u_4}{q} \times q \times u_4 = u_4^2$

$u_6 = u_0 \times q^6 = u_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = u_0 \times \frac{1}{729}$ donc $u_0 = 729 u_6$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
7	$u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$. On en déduit que ...	(u_n) est arithmétique	(u_n) est géométrique	(u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique	(v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ est géométrique	**CD**

$v_n = u_n - \dfrac{1}{3}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -2u_n + 1 - \dfrac{1}{3} = -2u_n + \dfrac{2}{3} = -2\left(u_n - \dfrac{1}{3}\right) = -2v_n$

	Question	A	B	C	D	Votre réponse
8	La somme : $1+2+2^2+\cdots+2^{10}$ est égale à …	$2^{10}-2$	$2^{11}-1$	2048	2047	**BD**

$$1+2+\cdots+2^{10}=2^0+2^1+\cdots+2^{10}=2^0\times\frac{1-2^{11}}{1-2}=1\times\frac{1-2048}{-1}=2\,048-1=2\,047$$

Exercice 2 [7 points] L'aquarium

Le 1er janvier 2024 il y a 50 poissons dans un aquarium. Chaque année, 20% des poissons de cet aquarium meurent et on ajoute 15 nouveaux poissons en fin d'année.
On note u_n le nombre de poissons dans l'aquarium le 1er janvier de l'année $2024+n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+15$.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=u_n-75$.
   a. Calculer v_0.
   b. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. Cet aquarium a une capacité maximale de 80 poissons : sera-t-il suffisant ou bien faudra-t-il à un moment envisager l'achat d'un aquarium plus grand ?

Corrigé

1. **Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+15$.**

   On se place n années après 2024 : il y a u_n poissons.
   Le nombre de poissons va ensuite diminuer de 20% donc on va perdre 20% de u_n poissons soit $\frac{20}{100}\times u_n$ poissons, ou encore $\frac{1}{5}\times u_n$ poissons, mais à la fin de l'année 15 nouveaux poissons vont être ajoutés donc le nombre de poissons va augmenter de 15.
   L'année suivante, on aura donc un nombre de poissons égal à :
   $$u_n-\frac{1}{5}u_n+15=u_n\left(1-\frac{1}{5}\right)+15=\frac{4}{5}u_n+15$$
   Autrement dit : $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+15$.

   On a donc bien : $\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}}=\frac{4}{5}u_n+15$.

2. **Calculer u_1 et u_2.**
   $$u_1=\frac{4}{5}u_0+15=\frac{4}{5}\times 50+15=40+15=55$$
   $$u_2=\frac{4}{5}u_1+15=\frac{4}{5}\times 55+15=4\times 11+15=44+15=59$$
   Résumons : $\boldsymbol{u_1=55}$ et $\boldsymbol{u_2=59}$.

3. **Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-75$.**

   a. **Calculer v_0.**
   $v_0=u_0-75=50-75=-25$.
   Conclusion : $\boldsymbol{v_0=-25}$.

   b. **Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**
   Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-75}{u_n-75}=\frac{\frac{4}{5}u_n+15-75}{u_n-75}=\frac{\frac{4}{5}u_n-60}{u_n-75}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{60}{\frac{4}{5}}\right)}{u_n - 2\,000} = \frac{\frac{4}{5}(u_n - 60 \times \frac{5}{4})}{u_n - 75} = \frac{\frac{4}{5}(u_n - 15 \times 4 \times \frac{5}{4})}{u_n - 75} = \frac{\frac{4}{5}(u_n - 75)}{u_n - 75} = \frac{4}{5}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{5}$ et $\frac{4}{5}$ est une constante donc (v_n) **est géométrique de raison $\frac{4}{5}$**.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_n = v_0 \times q^n$ $(Cours)$

Or, $v_0 = -25$ et $q = \frac{4}{5}$ donc $v_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n} = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

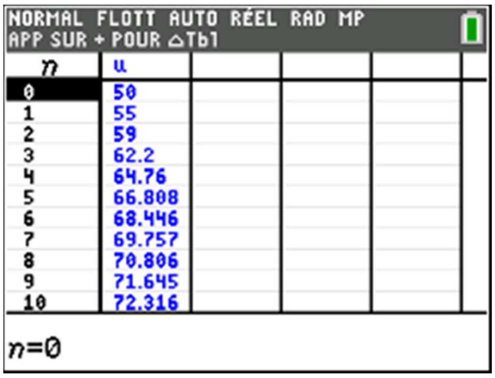
On a : $v_n = u_n - 75$ donc $u_n = v_n + 75$. Or, $v_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $u_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75}$.

vérification

La formule précédente donne : $u_2 = \boldsymbol{-25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75} = -25 \times \frac{16}{25} + 75 = -16 + 75 = 59$

ce qui est conforme à ce que la calculatrice détermine directement :


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	u			
0	50			
1	55			
2	59			
3	62.2			
4	64.76			
5	66.808			
6	68.446			
7	69.757			
8	70.806			
9	71.645			
10	72.316			

n=0

4. Le sens de variation de la suite (u_n) est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

On a démontrée à la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + 75 - \left(-25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75\right) = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right) + 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 1$$

$$= 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(-\frac{4}{5} + \frac{5}{5}\right) = 25 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

On a donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$, $5 > 0$ donc $5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

5. Cet aquarium a une capacité maximale de 80 poissons : sera-t-il suffisant ou bien faudra-t-il à un moment envisager l'achat d'un aquarium plus grand ?

On a démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n +75$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$75 - u_n = 75 - \left(-25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 75\right) = 75 + 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 75 = 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Or, $\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$ et $25 > 0$ donc $25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$, autrement dit : $75 - u_n > 0$, ou encore : $75 > u_n$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 75$.

La population de poissons ne dépassera jamais 75 individus, donc **l'aquarium de capacité maximale 80 poissons sera suffisant**.

Exercice 3 [5 points] Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et programme Python

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 + 2n + 2}$$

   a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

   c. Le programme Python suivant détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > 0{,}99$:

```
01 n=0
02 U=-0.5
03 while U ____________________
04    U = (n**2+2*n-1)/(n**2+2*n+2)
05    n= ____________________
06 print("n_0=", ____________________
```

   Écrire sur l'énoncé les lignes 03 , 05 et 06 exactement comme elles doivent être tapées.

Corrigé

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

   a. Calculer $f'(x)$.

   Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)[x^2+2x+2-(x^2+2x-1)]}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2x+2-x^2-2x+1}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(2x+2)(3)}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x+6}{(x^2+2x+2)^2}}$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $6x+6$.
$6x+6=0 \Leftrightarrow 6x=-6 \Leftrightarrow x=-1$
Règle : « $ax+b$ est du signe de a à droite de sa racine ».
$$f(-1) = \frac{(-1)^2+2(-1)-1}{(-1)^2+2(-1)+2} = \frac{1-2-1}{1-2+2} = \frac{-2}{1} = -2$$
Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2+2n+2}$$

a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq n < n+1$, or f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve strictement le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent $f(n) < f(n+1)$.
Or, $f(n) = u_n$ et $f(n+1) = u_{n+1}$ donc $u_n < u_{n+1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **est strictement croissante**.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$1-u_n = 1-\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n+2} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+2} - \frac{n^2+2n-1}{n^2+2n+2} = \frac{n^2+2n+2-(n^2+2n-1)}{n^2+2n+2}$$
$$= \frac{3}{n^2+2n+2} > 0$$
$1-u_n > 0$, autrement dit : $1 > u_n$.
On a donc bien : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1}$.

c. Le programme Python suivant détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > 0{,}99$:

```
n=0
U=-0.5
while U<0.99 :
  U = (n**2+2*n-1)/(n**2+2*n+2)
  n=n+1
print("n_0=",n-1)
```

En faisant tourner ce programme, on obtient $n_0 = 17$.

Avec la calculatrice :